

Министерство труда и социальной защиты
Республики Беларусь

Государственное учреждение образования
«Республиканский институт повышения квалификации
и переподготовки работников Министерства труда
и социальной защиты Республики Беларусь»

Н. Н. КОРНЕЛЮК

ЭКОНОМИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ

Пособие

Минск
«Колорград»
2017

УДК 005.932:519.86(075.9)

ББК 65.40я75

К67

Рекомендовано к изданию Советом института Государственного учреждения образования «Республиканский институт повышения квалификации и переподготовки работников Министерства труда и социальной защиты Республики Беларусь», протокол от 14.09.2017, №4.

Рецензенты:

зав. кафедрой экономики и управления
научными исследованиями, проектированием и производством
Белорусского национального технического университета,
кандидат экономических наук, доцент *Е. В. Гурина*;
зав. кафедрой экономики Белорусского государственного
университета информатики и радиоэлектроники,
кандидат экономических наук, доцент *В. А. Пархименко*

Корнелюк, Н. Н.

К67 Экономико-математические методы и модели в логистике : пособие / Н. Н. Корнелюк. – Минск : Колорград, 2017. – 40 с.
ISBN 978-985-596-001-1.

В пособии рассмотрены вопросы применения экономико-математических моделей и методов в логистике предприятия, в том числе модели управления запасами, транспортных задач и теории массового обслуживания.

Пособие предназначено для слушателей, проходящих повышение квалификации и переподготовку в Республиканском институте повышения квалификации и переподготовки работников Министерства труда и социальной защиты Республики Беларусь, а также для специалистов в области логистики.

УДК 005.932:519.86(075.9)

ББК 65.40я75

ISBN 978-985-596-001-1

© РИПК Минтруда и соцзащиты, 2017

© Оформление. ЧПТУП «Колорград», 2017

Содержание

Предисловие	4
1. Основные понятия об экономико-математических методах и моделях в логистике	5
2. Модели управления запасами	12
3. Модели транспортных задач	24
4. Модели систем массового обслуживания	29
Литература	39

Предисловие

В современных экономических условиях логистика является широко востребованным инструментом рациональной организации и управления материальными, информационными и людскими потоками. Для обеспечения эффективности логистической системы необходим соответствующий математический аппарат, позволяющий с заданной точностью рассчитывать все параметры системы управления предприятием при условии минимизации затрат.

Наиболее актуальная сегодня проблема – это разработка математических моделей и методов управления логистическими процессами. В данном пособии представлены базовые понятия, которые необходимы для использования математических методов и моделей по различным направлениям логистики. Первый раздел посвящен обзору теоретических аспектов математического аппарата, применяемого в логистике.

Второй раздел содержит краткие сведения о моделях управления запасами, в том числе основные теоретические понятия, представлено формализованное описание различных моделей и особенностей их применения.

В третьем разделе рассматриваются модели транспортных задач, способы определения оптимального плана, разработка метода решения транспортной задачи.

В четвертом разделе описываются модели систем массового обслуживания или очередей: классификационные признаки систем массового обслуживания; основные показатели, характеризующие системы массового обслуживания; условия использования каждой модели.

Пособие предназначено для слушателей, проходящих повышение квалификации и переподготовку по различным специальностям на базе РИПК Минтруда и соцзащиты Республики Беларусь.

1. Основные понятия об экономико-математических методах и моделях в логистике

Модель представляет собой такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования заменяет собой объект-оригинал таким образом, что его непосредственное изучение дает новые сведения об объекте-оригинале.

Моделирование в таком случае представляет собой процесс построения, изучения и применения моделей. Главная особенность моделирования состоит в том, что это метод опосредованного познания при помощи объектов-заменителей. Основная цель моделирования – прогноз поведения процесса или системы.

Существенной характеристикой любой модели является степень полноты подобия модели моделируемому объекту. По этому признаку все модели можно разделить на изоморфные и гомоморфные.

Изоморфные модели – это модели, включающие все характеристики объекта оригинала, способные по существу заменить его. Если можно создать и наблюдать изоморфную модель, то наши знания о реальном объекте будут точными. В этом случае мы сможем точно предсказать поведение объекта.

Гомоморфные модели. В их основе лежит неполное, частичное подобие модели изучаемому объекту. При этом некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем. В результате упрощается построение модели и интерпретация результатов исследования. При моделировании логистических систем абсолютное подобие не имеет места.

Следующим признаком классификации является материальность модели. В соответствии с этим признаком все модели можно разделить на материальные и абстрактные.

Материальные модели воспроизводят основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого явления или объекта. К этой категории относятся, в частности, уменьшенные макеты предприятий оптовой торговли, позволяющие решить вопросы оптимального размещения оборудования и организации грузовых потоков.

Абстрактное моделирование часто является единственным способом моделирования в логистике. Его подразделяют на символическое и математическое.

К символическим моделям относят языковые и знаковые. **Языковые модели** — это словесные модели, в основе которых лежит набор слов (словарь), очищенных от неоднозначности.

Знаковые модели. Если ввести условное обозначение отдельных понятий, т. е. знаки, а также договориться об операциях между этими знаками, то можно дать символическое описание объекта.

Математические модели экономических процессов и явлений называют экономико-математическими моделями (далее — ЭММ).

Классифицировать ЭММ можно по различным основаниям.

1. По целевому назначению модели можно делить на: теоретико-аналитические; прикладные, используемые для решения конкретных задач.

2. По уровням исследуемых экономических процессов: производственно-технологические; социально-экономические.

3. По характеру отражения причинно-следственных связей: детерминированные; недетерминированные (вероятностные, стохастические), учитывающие фактор неопределенности.

4. По способу отражения фактора времени: статические; динамические.

5. По форме математических зависимостей: линейные; нелинейные.

6. По степени детализации: агрегированные («макромодели»); детализированные («микромодели»).

Математическим моделированием называется процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью. В логистике широко применяются два вида математического моделирования: аналитическое и имитационное.

Аналитическое моделирование – это математический прием исследования логистических систем, позволяющий получать точные решения. Аналитическое моделирование осуществляется в следующей последовательности.

Первый этап. Формулируются математические законы, связывающие объекты системы. Эти законы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, дифференциальных и т. п.).

Второй этап. Решение уравнений, получение теоретических результатов.

Третий этап. Сопоставление полученных теоретических результатов с практикой (проверка на адекватность).

К достоинствам аналитического моделирования относят большую силу обобщения и многократность использования.

Другим видом математического моделирования является **имитационное моделирование**.

Учитывая, что логистические системы функционируют в условиях неопределенности окружающей среды, при управлении материальными потоками должны учитываться факторы, многие из которых носят случайностный характер. В этих условиях создание аналитической модели, устанавливающей четкие количественные соотношения между различными составляющими логистических процессов, может оказаться либо невозможным, либо слишком дорогим.

При имитационном моделировании закономерности, определяющие характер количественных отношений внутри логистических процессов, остаются непознанными. В этом плане логистический процесс остается для экспериментатора «черным ящиком».

Имитационное моделирование включает в себя два основных процесса: 1) конструирование модели реальной системы; 2) постановка экспериментов на этой модели.

При этом могут преследоваться следующие цели: а) понять поведение логистической системы; б) выбрать стратегию, обеспечивающую наиболее эффективное функционирование логистической системы.

Основным достоинством имитационного моделирования является то, что этим методом можно решать более сложные задачи. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать случайные воздействия и другие факторы, которые создают трудности при аналитическом исследовании.

При имитационном моделировании воспроизводится процесс функционирования системы во времени. Причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Модели не решают, а осуществляют прогон программы с заданными параметрами, меняя параметры, осуществляя прогон за прогоном.

Методы, используемые при экономико-математическом моделировании.

1. Линейное программирование – линейное преобразование переменных в системах линейных уравнений. Сюда можно отнести: симплекс-метод, распределительный метод, статический матричный метод решения материальных балансов.

2. Дискретное программирование представлено двумя классами методов: локализационные и комбинаторные методы. К локализационным относятся методы линейного целочисленного программирования. К комбинаторным, например, метод ветвей и границ.

3. Математическая статистика используется для корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа экономических процессов и явлений. Корреляционный анализ применяется для установления тесноты связи между двумя или более стохастически независимыми процессами или явлениями. Регрессионный анализ устанавливает зависимость случайной величины от неслучайного аргумента. Дисперсионный анализ – установление зависимости результатов наблюдений от одного или нескольких факторов в целях выявления важнейших.

4. Динамическое программирование используется для планирования и анализа экономических процессов во времени. Динамическое программирование представляется в виде многошагового вычислительного процесса с последовательной оптимизацией целевой функции.

5. Теория игр представляется совокупностью методов, используемых для определения стратегии поведения конфликтующих сторон.

6. Теория массового обслуживания – большой класс методов, где на основе теории вероятностей оцениваются раз-

личные параметры систем, характеризующихся как системы массового обслуживания.

7. Теория управления запасами объединяет в себе методы решения задач, в общей формулировке сводящихся к определению рационального размера запаса какой-либо продукции при неопределенном спросе на нее.

8. Стохастическое программирование. Здесь исследуемые параметры являются случайными величинами.

9. Нелинейное программирование относится к наименее изученному, применительно к экономическим явлениям и процессам, математическому направлению.

10. Теория графов – направление, где на основе определенной символики представляется формальное описание взаимосвязанности и взаимообусловленности множества элементов (работ, ресурсов, затрат и т. п.).

Этапы моделирования

1. Постановка проблемы и ее качественный анализ. Главное на этом этапе – четко сформулировать сущность проблемы, определить принимаемые допущения, а также определить те вопросы, на которые требуется получить ответ. Этап включает выделение важнейших черт и свойств моделируемого объекта, основных зависимостей, связывающих его элементы. Здесь же происходит формулирование гипотез, хотя бы предварительно объясняющих поведение объекта.

2. Построение математической модели. Это этап формализации задачи, т. е. выражения ее в виде математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств, схем). Как правило, сначала определяется тип математической модели, а затем уточняются детали. При этом нужно учитывать не только реальные возможности информационного и математического обеспечения, но и сопоставлять затраты на моделирование с получаемым эффектом (при

возрастании сложности модели прирост затрат может превысить прирост эффекта).

3. Математический анализ модели. Цель – выявление общих свойств и характеристик модели. Применяются чисто математические приемы исследования. Наиболее важный момент – доказательство существования решений в сформулированной модели. Если удастся доказать, что задача не имеет решения, то необходимость в последующей работе по данному варианту модели отпадает; следует скорректировать либо постановку задачи, либо способы ее математической формализации.

4. Подготовка исходной информации. Численное моделирование предъявляет жесткие требования к исходной информации. В то же время реальные возможности получения информации существенно ограничивают выбор используемых моделей. При этом принимается во внимание не только возможность подготовки информации (за определенный срок), но и затраты на подготовку соответствующих информационных массивов. Эти затраты не должны превышать эффекта от использования данной информации.

5. Численное решение. Это составление алгоритмов, разработка программ и непосредственное проведение расчетов на ЭВМ.

6. Анализ результатов и их применение. На заключительной стадии проверяются правильность, полнота и степень практической применимости полученных результатов.

Естественно, что после каждой из перечисленных стадий возможен возврат к одной из предыдущих в случае необходимости уточнения информации, пересмотра результатов выполнения отдельных этапов. Например, если на этапе 2 формализовать задачу не удастся, то необходимо вернуться к постановке проблемы (этап 1).

2. Модели управления запасами

Логистическая система управления запасами проектируется с целью непрерывного обеспечения предприятия товарами, материалами, полуфабрикатами. Реализация этой цели достигается решением следующих задач: учет текущего уровня запаса на складах; определение размера гарантийного (страхового) запаса; расчет размера заказа; определение интервала времени между заказами.

Рассмотрим основные понятия теории управления запасами.

Издержки выполнения заказа (издержки заказа) – накладные расходы, связанные с оформлением заказа. В промышленном производстве такими издержками являются затраты на переналадку оборудования и подготовительные операции.

Издержки хранения – расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно они выражены в абсолютных единицах или в процентах от закупочной цены и связаны с определенным промежутком времени.

Упущенная прибыль (издержки дефицита) – издержки, связанные с неудовлетворенным спросом, возникающим из-за отсутствия продукта на складе. Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенной прибыли. Иногда к ним прибавляются издержки на закупку товара.

Срок выполнения заказа – время с момента заказа до момента его выполнения.

Точка восстановления – уровень запаса, при котором делается новый заказ.

Существуют две основные модели системы управления запасами: модель с фиксированным объемом заказа (Q-модель); модель с фиксированным периодом между заказами (Р-модель).

Системы управления фиксированным размером заказа. При управлении по Q-модели очередной заказ на поставку осуществляется в момент, когда запас материала снизится до порогового уровня. Это может произойти в любой момент и зависит от объема потребления. Использование данной системы предполагает постоянный контроль остатка запасов. Q-модель рекомендуется для управления запасами дорогостоящих ресурсов, так как она обеспечивает наименьший средний размер заказа. Однако для указанной модели характерна большая трудоемкость обслуживания, поэтому для менее дорогостоящих объектов применяется система с фиксированным временем между заказами.

Система управления запасами с фиксированным периодом времени между заказами. При управлении запасами по Р-модели размещение очередного заказа осуществляется через заранее определенный период. При Р-модели вычисление остатка запаса производится лишь по истечении контрольного периода времени.

Р-модель имеет больший запас, поскольку ресурсов должно хватить до момента следующей поставки через фиксированный интервал.

Другие модели, используемые в системе управления запасами.

Модель 20/80. В соответствии с этой методикой компоненты запаса, составляющие 20% его общего количества и 80% его общей стоимости, должны отслеживаться отделом снабжения более внимательно.

Модель ABC. В рамках этой методики запасы, имеющиеся в распоряжении предприятия, разделяются на три группы: А, В и С.

Группа А: 10% общего количества запасов и 65% их стоимости.

Группа В: 25% общего количества запасов и 25% их стоимости.

Группа С: 65% общего количества запасов и около 10% их стоимости.

Именно *наименьшая* по объему и *наиболее* ценная часть запасов может стать предметом особого контроля и математического моделирования.

Необходимо отметить, что классификация запасов может быть основана не только на показателях доли в общей стоимости и в общем количестве. Некоторые виды запасов могут быть причислены к более высокому классу на основании таких характеристик, как специфика поставок, качество и т. д. Преимущество методики деления запасов на классы заключается в том, что для каждого из них можно выбрать свой порядок контроля и управления.

Отметим некоторые моменты политики управления запасами, классификация которых проведена на основе ABC-анализа.

1. Запасы группы А требуют более внимательного и частого проведения инвентаризации; правильность учета запасов этой группы должна подтверждаться чаще.

2. Планирование и прогнозирование запасов группы А должно характеризоваться большей степенью точности, нежели планирование запасов групп В и С.

3. Для группы А нужно стараться создать страховой запас, чтобы избежать больших расходов, связанных с отсутствием запасов этой группы.

4. Методы и приемы управления запасами, рассмотренные далее, должны применяться прежде всего к группам А и В. Что касается запасов группы С, обычно момент возобновления заказа по ним определяют исходя из конкретных условий, а не на основе количественного метода, чтобы свести к минимуму расходы на их контроль.

Простейшая модель оптимального размера заказа.

Предположим, что: темп спроса на товар известен и постоянен; получение заказа мгновенно; закупочная цена не зависит от размера заказа; дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Размер заказа является постоянным. Заказ выполняется мгновенно. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает нулевого значения. В этот момент времени делается и мгновенно выполняется заказ и уровень запаса восстанавливается до максимального значения. При этом оптимальным решением задачи будет такой размер заказа, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек заказа.

Пусть Q – размер заказа; T – продолжительность периода планирования; D, d – величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; K – издержки одного заказа; H, h – удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно.

Тогда:

$$C_1 = \frac{D}{Q} K - \text{издержки заказа за период планирования;}$$

$C_2 = \frac{Q}{2}H$ – издержки хранения за период планирования;

$C = C_1 + C_2 = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H$ – совокупные издержки.

Определив минимум функции совокупных издержек, получаем:

$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}}$ – оптимальный размер заказа;

$N = \frac{D}{Q^*}$ – оптимальное число заказов за период;

$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$ – время цикла (оптимальное время между заказами).

Следует обратить внимание на то, что оптимальный размер заказа не зависит от цены продукта.

Модель оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения.

Предположим, что: темп спроса на товар известен и постоянен; время выполнения заказа известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа; дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Размер заказа является постоянным. Время выполнения заказа постоянно. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает точки восстановления R .

В этот момент делается заказ, который выполняется за время L . К моменту поступления заказа размер запаса на складе равен нулю. Оптимальным решением задачи будет такой размер заказа Q^* , при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек заказа.

Пусть Q – размер заказа; T – продолжительность периода планирования; D, d – величина спроса за период планирования или в единицу времени соответственно; K – издержки одного заказа; H, h – удельные издержки хранения за период или в единицу времени соответственно; L – время выполнения заказа. Тогда:

$\frac{D}{Q}K$ – издержки заказа за период планирования;

$\frac{Q}{2}H$ – издержки хранения за период планирования;

$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H$ – совокупные издержки;

$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}}$ – оптимальный размер заказа;

$R = dL$ – точка восстановления запаса;

$N = \frac{D}{Q^*}$ – оптимальное число заказов за период;

$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$ – время цикла (оптимальное время между заказами).

Модель оптимального размера заказа с производством.

Предположим, что: темп спроса на товар известен и постоянен; темп производства товара известен и постоянен;

время выполнения заказа известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа; дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, темп производства, издержки заказа, издержки хранения, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса.

Фирма производит продукт самостоятельно, хранит его на складе и расходует с постоянным темпом. Если темп производства выше темпа спроса, то излишки продукта накапливаются на складе. Когда количество продукта на складе достигает максимального значения, производство прекращается и продукт расходуется со склада с постоянным темпом. Когда запас на складе достигает точки восстановления, производство возобновляется. При этом *оптимальным решением задачи* будет такой размер заказа Q^* , при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек на возобновление (запуск) производства.

Пусть Q – размер заказа; P – темп производства; T – продолжительность периода планирования; D, d – величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; K – фиксированные издержки на запуск производства; H, h – удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно; L – время, необходимое для запуска производства. Тогда:

$\frac{D}{Q}K$ – издержки на запуск производства;

$\frac{Q}{2}H\left(1 - \frac{d}{p}\right)$ – издержки хранения;

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h\left(1-\frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2DK}{H\left(1-\frac{d}{p}\right)}} - \text{оптимальный размер заказа;}$$

$$S^* = Q^* \left(1 - \frac{d}{p}\right) - \text{оптимальный максимальный уровень запасов;}$$

$$R = dL - \text{точка восстановления;}$$

$$N = \frac{D}{Q^*} - \text{оптимальное число заказов за период;}$$

$$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N} - \text{время цикла (оптимальное время между заказами).}$$

В этой модели оптимальный размер заказа также не зависит от цены продукта.

Модель оптимального размера заказа с дефицитом.

Предположим, что: темп спроса на товар известен и постоянен; время выполнения заказа известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, издержки дефицита.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, совокупные издержки.

Размер заказа является постоянным. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью. Допускается дефицит продукта. После получения заказа фирма компенсирует дефицит и восстанавливает запас продукта на складе. Заказ делается тогда, когда дефицит продукта на складе достигает оптимального размера. Оптимальным решением задачи будет такой размер заказа Q^* , при котором минимизируются

общие издержки за период, равные сумме издержек хранения, издержек заказа и издержек дефицита.

Пусть Q – размер заказа; T – продолжительность периода планирования; D, d – величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; K – издержки одного заказа; H, h – удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно; B, b – упущенная прибыль, возникающая вследствие дефицита одной единицы продукта, за период и в единицу времени соответственно; S – максимальный запас продукции; L – время выполнения заказа.

Тогда:

$\frac{D}{Q}K$ – издержки заказа за период планирования;

$\frac{S^2}{2Q}H$ – издержки хранения за период планирования;

$\frac{(Q-S)^2}{2Q}B$ – издержки дефицита за период планирования;

$C = \frac{D}{Q}K + \frac{S^2}{2Q}H + \frac{(Q-S)^2}{2Q}B$ – совокупные издержки;

$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h} \cdot \frac{b+h}{b}} = \sqrt{\frac{2DK}{H} \cdot \frac{B+H}{B}}$ – оптимальный размер заказа;

$S^* = \sqrt{\frac{2dK}{h} \cdot \frac{b}{b+h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H} \cdot \frac{B}{B+H}}$ – оптимальный максимальный размер запаса;

$Q^* - S^*$ – оптимальный максимальный дефицит;

$R = dL$ – точка восстановления запаса.

Модель оптимального размера заказа с количественными скидками.

Предположим, что: темп спроса на товар известен и постоянен; время выполнения заказа известно и постоянно.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, цена товара, количественные скидки в случае закупки крупных партий товара.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Пусть Q – размер заказа; T – продолжительность периода планирования; D, d – величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; K – издержки одного заказа; H, h – удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно.

Предположим, что известны числа $CI, AI, I = 1, \dots, P$, где CI – цена продукта при размере заказа Q в интервале $AI-1 \leq Q < AI$. Будем считать, что $A_0 = 0$ и $A_n = +\infty$.

Тогда:

$\frac{D}{Q}K$ – издержки заказа за период планирования;

$\frac{Q}{2}H$ – издержки хранения за период хранения;

$c_i D$ – издержки на закупку товара;

$$C_i = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H + c_i D.$$

Оптимальный размер заказа определяется в результате решения P задач. Каждая из этих задач сводится к определе-

нию такого размера заказа Q_i , $i = 1, \dots, P$, при котором функция совокупных (общих) издержек $C_i = \frac{D}{Q} K + \frac{Q}{2} H + c_i D$ достигает минимума при ограничениях $a_{i-1} \leq Q_i < a_i$.

Решение исходной задачи определяется из условия

$$Q^* = \arg \min \min \{C_i(Q_i)\}$$

Соответственно, функция общих издержек $C1(Q)$ определена при значении цены $C1$ на интервале $0 \leq Q < A1$, функция $C2(Q)$ – при значении цены $C2$ на интервале $A1 \leq Q < A2$, функция $C3(Q)$ – при значении цены $C3$ на интервале $A2 \leq Q < +\infty$.

Минимальное значение функции $C1(Q)$ в области ее допустимых значений достигается в точке $Q1$, функции $C2(Q)$ – в точке $A1$, функции $C3(Q)$ – в точке $A2$.

Оптимальный размер заказа следует выбирать из величин $Q1$, $A1$ и $A2$ по формуле

$$Q^* = \arg \min \{C_1(Q_1), C_2(a_1), C_3(a_2)\}.$$

Дискретная стохастическая модель оптимизации начального запаса.

Мы отказываемся от предположения о постоянстве и детерминированности величины спроса на товар и предполагаем известным распределение величины спроса.

Пусть S – размер запаса на начало периода планирования;

D – величина спроса за период планирования (целое число);

H – удельные издержки хранения за период;

B – удельные издержки дефицита за период;

$P(D)$ – вероятность того, что величина спроса за период планирования составит D .

Функция распределения величины спроса

$$F(X) = P(D < x) = \sum_{D=0}^{x-1} p(D).$$

В случае, когда величина спроса за период планирования превышает размер запаса ($D > S$), возникает дефицит и соответствующие издержки дефицита. Если запас больше, чем величина спроса ($S > D$), то возникают издержки хранения. Математическое ожидание $C_1(S)$ величины издержек хранения за период планирования для размера начального запаса S можно оценить следующим образом:

$$C_1(S) = H \sum_{D=0}^S (S - D)p(D).$$

Математическое ожидание $C_2(S)$ величины издержек дефицита за период планирования для размера начального запаса S можно оценить следующим образом:

$$C_2(S) = B \sum_{D=S+1}^{\infty} (D - S)p(D).$$

Математическое ожидание $C(S)$ совокупных издержек в этом случае имеет вид:

$$C(S) = C_1(S) + C_2(S).$$

В стохастической модели оптимальным является такой размер начального запаса S^* , при котором математическое ожидание совокупных издержек $C(S^*)$ имеет минимальное значение, т. е. такой размер запаса S^* , который удовлетворяет условию:

$$F(S^*) = \frac{B}{H + B},$$

Если , то оптимальными являются как размер запаса S^* , так и размер запаса $(S^* + 1)$: $C(S^* + 1)$.

3. Модели транспортных задач

Одой из самых востребованных математических моделей, используемых в логистике, является модель транспортной задачи. Такая модель используется для составления наиболее экономичного плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов (например, заводов) в пункты доставки (например, склады). Транспортную модель можно применять при рассмотрении ряда практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, назначением служащих на рабочие места, оборотом наличного капитала, регулированием расхода воды в водохранилищах и многими другими. Кроме того, модель можно видоизменить с тем, чтобы она учитывала перевозку нескольких видов продукции.

Транспортная задача представляет собой задачу линейного программирования, однако ее специфическая структура позволяет так модифицировать применяемый симплекс-метод, что вычислительные процедуры становятся более эффективными. При разработке метода решения транспортной задачи существенную роль играет теория двойственности.

В классической транспортной задаче рассматриваются перевозки (прямые или с промежуточными пунктами) одного или нескольких видов продукции из исходных пунктов в пункты назначения. Эту задачу можно видоизменить, включив в нее ограничения сверху на пропускные способности транспортных коммуникаций. Задачу о назначениях и задачу управления запасами можно рассматривать как задачи транспортного типа.

Пример. В пунктах отправления A_1, A_2, A_3 находится однородный груз в количестве a_1, a_2, a_3 соответственно, который необходимо перевезти в пункты назначения $B_1, B_2,$

b_3 , потребность каждого из которых составляет b_1 , b_2 , b_3 . Известно расстояние между пунктами перевозок (оценки).

Определить такой план перевозок, при котором общее количество тонно-километров будет минимальной.

Входные данные согласно варианту приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Входные данные транспортной задачи

	1	2	3	Запасы
1	10	15	22	50
2	16	20	11	85
3	18	16	33	52
Потребности	62	81	43	

Математическая модель транспортной задачи:

$$F = \sum \sum c_{ij} x_{ij},$$

при условиях:

$$\sum x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Экономико-математическая модель задачи. Переменные:

x_{11} – количество груза из 1-го склада в 1-й магазин; x_{12} – количество груза из 1-го склада во 2-й магазин; x_{13} – количество груза из 1-го склада в 3-й магазин; x_{21} – количество груза из 2-го склада в 1-й магазин; x_{22} – количество груза из 2-го склада в 2-й магазин; x_{23} – количество груза из 2-го склада в 3-й магазин; x_{31} – количество груза из 3-го склада в 1-й магазин; x_{32} – количество груза из 3-го склада в 2-й магазин; x_{33} – количество груза из 3-го склада в 3-й магазин.

Ограничения по запасам:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50 \text{ (для 1-й базы);}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 85 \text{ (для 2-й базы);}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 52 \text{ (для 3-й базы).}$$

Ограничения по потребностям:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 62 \text{ (для 1-го магазина);}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 81 \text{ (для 2-го магазина);}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 43 \text{ (для 3-го магазина).}$$

$$\text{Целевая функция: } 10x_{11} + 15x_{12} + 22x_{13} + 16x_{21} + 20x_{22} + 11x_{23} + 18x_{31} + 16x_{32} + 33x_{33} \rightarrow \min.$$

Определение оптимального плана транспортных задач, имеющих некоторые усложнения в их постановке.

При некоторых реальных условиях перевозки груза из определенного пункта A_i в пункт назначения B_j не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j является сколь угодно большой величиной M и при этом условии известными методами находят решение транспортной задачи. Такой подход к нахождению решения транспортной задачи называется запрещением перевозок.

В отдельных транспортных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Пусть, например, из A_i в B_j требуется обязательно перевезти a_{ij} единиц груза. Тогда в соответствующую клетку таблицы, находящуюся на пересечении строки A_i и столбца B_j , записывают указанное число a_{ij} и в дальнейшем считают эту клетку свободной со сколь угодно большой стоимостью перевозки M . Для полученной таким образом новой транспортной задачи находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи.

Иногда требуется найти решение, при котором из A_i в B_j должно быть перевезено не менее заданного количества груза a_{ij} . Для определения оптимального плана такой задачи счи-

тают, что запасы A_i и потребности B_j меньше фактических на a_{ij} единиц. После этого находят оптимальный план новой транспортной задачи, на основании которого и определяют решение исходной задачи.

Модель без дефицита.

В соответствии с терминологией транспортной модели поставщики представлены обычным и сверхурочным производством для различных этапов. Потребители задаются спросом соответствующих этапов. Затраты на «транспортировку» единицы продукции от любого поставщика к любому потребителю представляются суммой соответствующих производственных затрат и затрат на хранение единицы продукции.

При этом вводится дополнительный столбец для балансировки транспортной задачи, т. е. $S = \sum a_i - \sum b_j$. Затраты на единицу продукции в дополнительном столбце равны нулю. Так как дефицит не допускается, то продукцию, выпускаемую на рассматриваемом этапе, нельзя использовать для удовлетворения спроса предыдущих этапов.

Так как задолженность в модели не допускается, то для каждого этапа k в нее необходимо включить ограничение, состоящее в том, что накопленный спрос не должен превышать соответствующего общего объема произведенной продукции, т. е. $\sum (a_{ri} + at_i) \geq \sum b_j, k = 1, 2, \dots, N$.

Так как спрос на этапе i должен быть удовлетворен прежде, чем спрос на этапах $i+1, i+2, \dots, N$, и поскольку на функцию производственных затрат наложены специальные требования, нет необходимости применять общий алгоритм решения транспортной задачи. Сначала путем последовательного назначения максимально возможных поставок по наиболее дешевым элементам первого столбца удовлетворяется спрос на этапе 1. Затем корректируются значения, которые после этого определяют оставшиеся мощности для раз-

личных этапов. Далее рассматривается этап 2, и его спрос удовлетворяется наиболее дешевыми поставками в пределах новых ограничений на производственные мощности. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет удовлетворен спрос этапа N.

Модель с дефицитом.

Рассмотрим обобщение описанной выше модели при условии, что допускается дефицит. Предполагается, что задолженный спрос должен быть удовлетворен к концу N-этапного горизонта планирования. Таблицу можно легко модифицировать, чтобы учесть влияние задолженности, введя соответствующие удельные издержки в заблокированные маршруты.

Так, например, если p_i – удельные потери от дефицита (т. е. на единицу продукции) в случае, когда продукция требуется на этапе i , а поставляется на этапе $i+1$, то удельные расходы, соответствующие ячейкам $R_{N,1}$ и $T_{R,1}$, составляют: $\{c_N + p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1}\}$ и $\{d_N + p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1}\}$ соответственно.

Заметим, что в общем случае описанный выше алгоритм может не привести к оптимальному решению.

4. Модели систем массового обслуживания

Модели систем массового обслуживания или очередей (как и линейное программирование, модели управления запасами, методы сетевого анализа проектов) используются и в сфере управления материальным производством, и в сфере обслуживания. Анализ очередей в терминах длины очереди, среднего времени ожидания, среднего времени обслуживания и других факторов помогает нам лучше понять принципы организации системы обслуживания. Ожидание пациента в приемной врача и ожидание починки сломанной дрели в ремонтной мастерской имеют много общего с точки зрения управления процессом обслуживания. Оба процесса используют человеческие ресурсы и ресурсы оборудования для удовлетворения потребностей клиентов.

Классификационные признаки систем массового обслуживания.

В системах массового обслуживания различают три основных этапа, которые проходит каждая заявка:

- 1) появление заявки на входе в систему;
- 2) прохождение очереди;
- 3) процесс обслуживания, после которого заявка покидает систему.

На каждом этапе используются определенные характеристики, которые следует обсудить прежде, чем строить математические модели.

Характеристики входа:

- 1) число заявок на входе (размер популяции);
- 2) режим поступления заявок в систему обслуживания;
- 3) поведение клиентов.

Число заявок на входе. Число потенциально возможных заявок (размер популяции) может считаться либо бесконеч-

ным (неограниченная популяция), либо конечным (ограниченная популяция). Если число заявок, поступивших на вход системы с момента начала процесса обслуживания до любого заданного момента времени, является лишь малой частью потенциально возможного числа клиентов, популяция на входе рассматривается как неограниченная.

Если количество заявок, которые могут поступить в систему, сравнимо с числом заявок, уже находящихся в системе массового обслуживания, популяция считается ограниченной. Пример ограниченной популяции: компьютеры, принадлежащие конкретной организации и поступающие на обслуживание в ремонтную мастерскую.

Режим поступления заявок в систему обслуживания. Заявки могут поступать в систему обслуживания в соответствии с определенным графиком (например, один пациент на прием к стоматологу каждые 15 мин, один автомобиль на конвейере каждые 20 мин) или случайным образом. Появления клиентов считаются случайными, если они независимы друг от друга и точно непредсказуемы. Часто в задачах массового обслуживания число появлений в единицу времени может быть оценено с помощью пуассоновского распределения вероятностей. При заданном темпе поступления (например, два клиента в час или четыре грузовика в минуту) дискретное распределение Пуассона описывается следующей формулой:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

где $p(x)$ – вероятность поступления x заявок в единицу времени;

x – число заявок в единицу времени;

λ – математическое ожидание случайной величины;

λ – среднее число заявок в единицу времени (темп поступления заявок);

$e = 2,7182$ – основание натурального логарифма.

Соответствующие значения вероятностей $p(x)$ нетрудно определить с помощью таблицы пуассоновского распределения. Если, например, средний темп поступления заявок – два клиента в час, то вероятность того, что в течение часа в систему не поступит ни одной заявки, равна 0,135, вероятность появления одной заявки – около 0,27, двух – также около 0,27, три заявки могут появиться с вероятностью 0,18, четыре – с вероятностью около 0,09 и т. д. Вероятность того, что за час в систему поступят 9 заявок или более, близка к нулю.

На практике вероятности появления заявок, разумеется, не всегда подчиняются пуассоновскому распределению (они могут иметь какое-то другое распределение). Поэтому требуется проводить предварительные исследования для того, чтобы проверить, что пуассоновское распределение может служить хорошей аппроксимацией.

Поведение клиентов. Большинство моделей очередей основывается на предположении, что поведение клиентов является стандартным, т. е. каждая поступающая в систему заявка встает в очередь, дожидается обслуживания и не покидает систему до тех пор, пока ее не обслужат. Другими словами, клиент (человек или машина), вставший в очередь, ждет до тех пор, пока он не будет обслужен, не покидает очередь и не переходит из одной очереди в другую.

Характеристики очереди:

- 1) длина;
- 2) правило обслуживания.

Длина очереди. Длина может быть ограничена либо не ограничена. Длина очереди (очередь) ограничена, если она по каким-либо причинам (например, из-за физических огра-

ничений) не может увеличиваться до бесконечности. Если очередь достигает своего максимального размера, то следующая заявка в систему не допускается и происходит отказ. Длина очереди не ограничена, если в очереди может находиться любое число заявок.

Правило обслуживания. Большинство реальных систем использует правило «первым пришел – первым ушел» (FIFO). В некоторых случаях, например в приемном покое больницы, в дополнение к этому правилу могут устанавливаться различные приоритеты. Пациент с инфарктом в критическом состоянии, по-видимому, будет иметь приоритет в обслуживании по сравнению с пациентом, сломавшим палец. Порядок запуска компьютерных программ – другой пример установления приоритетов в обслуживании.

Характеристики процесса обслуживания:

- 1) конфигурация системы обслуживания (число каналов и число фаз обслуживания);
- 2) режим обслуживания.

Конфигурация системы обслуживания. Системы обслуживания различаются по числу каналов обслуживания. Обычно количество каналов можно определить как число клиентов, обслуживание которых может быть начато одновременно, например: число мастеров в парикмахерской. Примеры одноканальной системы обслуживания: банк, в котором открыто единственное окошко для обслуживания клиентов, или ресторан, обслуживающий клиентов в автомобилях. Если же в банке открыто несколько окошек для обслуживания, клиент ожидает в общей очереди и подходит к первому освободившемуся окну, то мы имеем дело с многоканальной однофазовой системой обслуживания. Большинство банков, так же как почтовые отделения и авиакассы, являются многоканальными системами обслуживания.

Другая характеристика – число фаз (или последовательных этапов) обслуживания одного клиента. Однофазовыми являются такие системы, в которых клиент обслуживается в одном пункте (на одном рабочем месте), затем покидает систему. Ресторан для обслуживания автомобилей, в котором официант получает деньги и приносит заказ в автомобиль, является примером однофазовой системы. Если же в ресторане нужно сделать заказ в одном месте, оплатить его в другом и получить пищу в третьем, то мы имеем дело с многофазовой (три фазы) системой обслуживания.

Режим обслуживания. Как и режим поступления заявок, режим обслуживания может характеризоваться либо постоянным, либо случайным временем обслуживания. При постоянном времени на обслуживание любого клиента затрачивается одинаковое время. Такая ситуация может наблюдаться на автоматической мойке автомобилей. Однако более часто встречаются ситуации, когда время обслуживания имеет случайное распределение. Во многих случаях можно предположить, что время обслуживания подчиняется экспоненциальному распределению с функцией распределения:

$F(t) = p(t < t) = 1 - e^{-tm}$, где $p(t < t)$ – вероятность того, что фактическое время t обслуживания заявки не превысит заданной величины t ;

m – среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

$e = 2,7182$ – основание натурального логарифма.

Параметры моделей очередей. При анализе систем массового обслуживания используются технические и экономические характеристики.

Наиболее часто используются следующие технические характеристики:

- 1) среднее время, которое клиент проводит в очереди;

- 2) средняя длина очереди;
- 3) среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания (время ожидания плюс время обслуживания);
- 4) среднее число клиентов в системе обслуживания;
- 5) вероятность того, что система обслуживания окажется незанятой;

6) вероятность определенного числа клиентов в системе.

Среди экономических характеристик наибольший интерес представляют следующие:

- 1) издержки ожидания в очереди;
- 2) издержки ожидания в системе;
- 3) издержки обслуживания.

Модели систем массового обслуживания. В зависимости от сочетания приведенных выше характеристик могут рассматриваться различные модели систем массового обслуживания.

Модель А – модель одноканальной системы массового обслуживания $M/M/1$ с пуассоновским входным потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания.

Наиболее часто встречаются задачи массового обслуживания с единственным каналом. В этом случае клиенты формируют одну очередь к единственному пункту обслуживания. Для систем этого типа выполняются следующие условия:

1. Заявки обслуживаются по принципу «первым пришел – первым обслужен», причем каждый клиент ожидает своей очереди до конца независимо от длины очереди.

2. Появления заявок являются независимыми событиями, однако среднее число заявок, поступающих в единицу времени, неизменно.

3. Процесс поступления заявок описывается пуассоновским распределением, причем заявки поступают из неограниченного множества.

4. Время обслуживания описывается экспоненциальным распределением вероятностей.

5. Темп обслуживания выше темпа поступления заявок.

Основные формулы.

Пусть λ – число заявок в единицу времени; μ – число клиентов, обслуживаемых в единицу времени, n – число заявок в системе. Тогда система массового обслуживания описывается уравнениями, приведенными ниже:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \text{ – среднее число клиентов в системе;}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \text{ – среднее время обслуживания одного клиента в системе (время ожидания плюс время обслуживания);}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \text{ – среднее число клиентов в очереди;}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \text{ – среднее время ожидания клиента в очереди;}$$

$$r = \frac{\lambda}{\mu} \text{ – характеристика загрузки системы (доля времени, в течение которого система занята обслуживанием);}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \text{ – вероятность отсутствия заявок в системе;}$$

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{k+1} \text{ – вероятность того, что в системе находится более чем } k \text{ заявок.}$$

Модель В – многоканальная система обслуживания М/М/С. В многоканальной системе для обслуживания открыты два канала или более. Предполагается, что клиенты ожидают в общей очереди и обращаются в первый освободившийся канал обслуживания.

Пример такой многоканальной однофазовой системы можно увидеть во многих банках: из общей очереди клиенты обращаются в первое освободившееся окошко для обслуживания.

В многоканальной системе поток заявок подчиняется пуассоновскому закону, а время обслуживания – экспоненциальному. Приходящий первым обслуживается первым, и все каналы обслуживания работают в одинаковом темпе. Формулы, описывающие модель В, достаточно сложны для использования. Для расчета параметров многоканальной системы обслуживания удобно использовать соответствующее программное обеспечение.

Для многоканальной системы с неограниченной очередью должно выполняться условие $\frac{r}{n} < 1$, где r – параметр загрузки системы (среднее число занятых каналов), n – минимальное количество каналов, при котором очередь не будет расти до бесконечности. В противном случае предельные вероятности существовать не могут.

Формулы для описания системы М/М/С:

$$P_0 = \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \dots + \frac{r^n}{n!} + \frac{r^{n+1}}{n!(n-r)} \right)^{-1}$$
 – вероятность того, что система свободна;

$$P_n = \frac{r^n}{n!} P_0$$
 – вероятность того, что в системе находится n заявок;

$P_q = \frac{r^{n+1}}{n!(n-r)} P_0$ – вероятность того, что заявка окажется в очереди;

$r = \frac{\lambda}{\mu}$ – среднее число занятых каналов;

$L_q = \frac{r^{n+1} P_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{r}{n}\right)^2}$ – среднее число заявок в очереди;

$L_s = L_q + r$ – среднее число заявок в системе;

$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q$ – время нахождения заявки в очереди;

$W_s = \frac{1}{\lambda} L_s$ – время нахождения заявки в системе.

Модель С – модель с постоянным временем обслуживания $M/D/1$.

Некоторые системы имеют постоянное, а не экспоненциально распределенное время обслуживания. В таких системах клиенты обслуживаются в течение фиксированного периода времени, как, например, на автоматической мойке автомобилей. Для модели С с постоянным темпом обслуживания значения величин L_q и W_q вдвое меньше, чем соответствующие значения в модели А, имеющей переменный темп обслуживания.

Формулы, описывающие модель С:

$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$ – средняя длина очереди;

$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$ – среднее время ожидания в очереди;

$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$ – среднее число клиентов в системе;

$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$ – среднее время ожидания в системе.

Модель D – модель с ограниченной популяцией.

Если число потенциальных клиентов системы обслуживания ограничено, мы имеем дело со специальной моделью. Такая задача может возникнуть, например, если речь идет об обслуживании оборудования фабрики, имеющей пять станков.

Особенность этой модели по сравнению с тремя рассмотренными ранее в том, что существует взаимозависимость между длиной очереди и темпом поступления заявок.

Модель E – модель с ограниченной очередью. Модель отличается от предыдущих тем, что число мест в очереди ограничено. В этом случае заявка, прибывшая в систему, когда все каналы и места в очереди заняты, покидает систему необслуженной, т. е. получает отказ.

Как частный случай модели с ограниченной очередью можно рассматривать модель с отказами, если количество мест в очереди сократить до нуля.

Литература

1. Бродецкий, Г. Л. Управление запасами: учебник / Г. Л. Бродецкий. – М.: Эксмо, 2008.
2. Бродецкий, Г. Л. Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации / Г. Л. Бродецкий, Д. А. Гусев. – М.: Издательский центр «Академия», 2011.
3. Ермольев, Ю. Н. Экстремальные задачи на графах / Ю. Н. Ермольев. – М.: Наука, 1970.
4. Замков, О. О. Математические методы в экономике: учебник / О. О. Замков [и др.]. – М.: МГУ-ДИС, 1997.
5. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов [и др.]. – М.: Высшая школа, 1976.
6. Модели и методы теории логистики: учебное пособие / Под ред. В. С. Лукинського. – СПб.: Питер, 2007.
7. Практикум по логистике: учебное пособие / Под ред. проф. Б. А. Аникина. – М.: Инфра-М, 2001.
8. Сергеев, В. И. Логистика в бизнесе / В. И. Сергеев – М.: Инфра-М, 2001.
9. Сергеев, В. И. Менеджмент в бизнес-логистике / В. И. Сергеев. – М.: ФИЛИНЪ, 1997.
10. Справочник по математике для экономистов / Под ред. проф. В. И. Ермакова. – М.: Высшая школа, 1997.
11. Тихомиров, Н. П. Эконометрика: учебник / Н. П. Тихомиров, Е. Ю. Дорохина. – М.: Экзамен, 2003.
12. Шикин, Е. В. Математические методы в управлении: учебное пособие / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. – М.: Дело, 2000.

Учебное издание

Корнелюк Наталья Николаевна

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ
В ЛОГИСТИКЕ**

Пособие

Ответственный за выпуск *Е. С. Пате́й*

Подписано в печать 30.11.2017. Формат 60 × 84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л. 2,33.
Уч.-изд. л. 1,23. Тираж 50 экз. Заказ 12926.

Издатель и полиграфическое исполнение:
частное производственно-торговое
унитарное предприятие «Колорград».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/471 от 23.12.2015.

Пер. Велосипедный, 5-904, 220033, г. Минск,
www.сегмент.бел